**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Теория графов (осн курс) тр 6/8 сем

Graph Theory

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 4

Регистрационный номер рабочей программы: 053657

**Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

**1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Обучение студентов основным методам дискретной математики; развитие у студентов комбинаторного, алгоритмического, логического мышления. Ознакомление с классическими и современными результатами в дискретной математике и развитие навыков их применения, в том числе в других областях математики.

**1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

Владение курсом «Теоретическая информатика».

**1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

Знать содержание дисциплины «Теория графов» и иметь достаточно полное представление о возможностях её в других разделах математики и в приложениях; иметь представление о структурах теории графов и основных комбинаторных методах доказательства и уметь применять эти методы, в том числе и в других дисциплинах

**1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

Промежуточная аттестация (экзамен) 4 часа, семинары 30 часов.

**Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий**

**2.1. Организация учебных занятий**

**2.1.1 Основной курс**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины,  практики и т.п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | Объём активных и интерактивных  форм учебных занятий | Трудоёмкость |
| лекции | семинары | консультации | практические  занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная  аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии  преподавателя | сам. раб. с использованием  методических материалов | текущий контроль (сам.раб.) | промежуточная аттестация (сам.раб.) | итоговая аттестация  (сам.раб.) |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| очная форма обучения | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 6/8 | 30 | 30 | 2 |  |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 48 |  | 32 |  | 34 | 4 |
|  | 2-50 | 2-25 | 2-50 |  |  |  |  |  | 2-50 |  |  |  | 1-1 |  | 1-1 |  |  |  |
| ИТОГО | 30 | 30 | 2 |  |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 48 |  | 32 |  | 34 | 4 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п. | Формы текущего контроля успеваемости | | Виды промежуточной аттестации | | Виды итоговой аттестации  (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) | |
| Формы | Сроки | Виды | Сроки | Виды | Сроки |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | |
| очная форма обучения | | | | | | |
| Семестр 6/8 |  |  | экзамен, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации |  |  |

**2.2. Структура и содержание учебных занятий**

Период обучения (модуль): **Семестр 6/8**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Наименование темы (раздела, части) | Вид учебных занятий | Количество часов |
| 1 | Пути и циклы в графе | Лекции | 4 |
| семинары | 4 |
| в присутствии преподавателя |  |
| по методическим материалам | 6 |
| 2 | Паросочетания | Лекции | 3 |
| семинары | 3 |
| в присутствии преподавателя |  |
| по методическим материалам | 5 |
| 3 | Раскраски графов | Лекции | 4 |
| семинары | 4 |
| в присутствии преподавателя |  |
| по методическим материалам | 6 |
| 4 | Связность | Лекции | 4 |
| семинары | 4 |
| в присутствии преподавателя |  |
| по методическим материалам | 6 |
| 5 | Планарные графы. | Лекции | 3 |
| семинары | 3 |
| в присутствии преподавателя |  |
| по методическим материалам | 5 |
| 6 | Ориентированные графы и сети | Лекции | 6 |
| семинары | 6 |
| в присутствии преподавателя |  |
| по методическим материалам | 8 |
| 7 | Экстремальные задачи | Лекции | 4 |
| семинары | 4 |
| в присутствии преподавателя |  |
| по методическим материалам | 6 |
| 8 | Графы и многочлены | Лекции | 4 |
| семинары | 4 |
| в присутствии преподавателя |  |
| по методическим материалам | 6 |
| 9 | Экзамен | промежуточная аттестация (ауд) | 2 |
| промежуточная аттестация (с.р.) | 32 |

**Модуль 1. Пути и циклы в графе**

Эйлеров путь и цикл. Существование Гамильтонова пути и цикла: классические критерии Оре и Дирака, метод замыкания, теоремы Хватала. Критерий существования гамильтонова цикла через связность. Теорема Бонди о панциклическом графе. Теорема Татта о существовании однородного графа степени c данными степенью и обхватом.

**Модуль 2. Паросочетания**

Максимальное паросочетание и дополняющие пути: теорема Бержа.

Независимые и доминирующие множества, паросочетания и покрытия в графе: Теорема Галлаи. Паросочетания с предпочтениями. Теорема Гэйла-Шепли. Cовершенные паросочетания в однородном графе. Дефицит графа. Формула Бержа.

**Модуль 3. Раскраски графов**

Существование правильной раскраски в k цветов вершин k-редуцируемого графа. Конструкция графа с произвольным хроматическим числом без треугольников. Совершенные графы: cлабая гипотеза Бержа - теорема Ловаса. Хроматический и покрывающий индексы графа: теоремы Визинга и Гупты.

**Модуль 4. Связность**

Теоремы Гёринга, Менгера и Уитни. Удаление вершины с сохранением k-связности. Удаление ребер с сохранением k-связности: теоремы Мадера. Стягивание ребра в двусвязном и трёхсвязном графе без уменьшения связности.

**Модуль 5. Планарные графы**

Теорема Куратовского. Двойственный граф, триангуляция графа. Тэйтовы раскраски, эквивалентность Тэйта: вокруг теоремы о 4 красках.

**Модуль 6. Ориентированные графы и сети**

Существование гамильтонова цикла в сильно связном турнирном графе. Удаление вершин из сильно связного турнирного графа с сохранением сильной связности. Теорема Редеи. Циклы в сильно связных турнирных графах. Теоремы Муна. Теорема Хватала-Ловаса о независимом множестве в ориентированном графе. Теорема Галлаи-Мильграма и теорема Дилворса. Теорема Роя-Галлаи о раскрасках и ориентациях. Теорема Гэльвина о списочных рёберных раскрасках двудольного графа. Сети и потоки: Теорема Менгера как следствие теоремы Форда-Фалкерсона.

**Модуль 7. Экстремальные задачи**

Оценка количества рёбер в графе, удовлетворяющем наследственному свойству. Графы без клики на n вершинах: теорема Турана. Оценка сверху количества рёбер в графе без полного двудольного подграфа. Проективная плоскость над конечным полем и графы без циклов длины 4. Конечные поля и графы без K\_{2,n}.

**Модуль 8. Графы и многочлены**

Хроматический многочлен графа. Смысл кратности корней 0 и 1 хроматического многочена. Многочлен Татта. Корректность определения и связь с ранговым многочленом Уитни. Значения полинома Татта: количество остовных лесов и остовных подграфов с минимальным количеством компонент связности, количество ациклических подграфов. Универсальное свойство многочлена Татта. Связь с хроматическим многочленом.

**Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

**3.1. Методическое обеспечение**

**3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

Посещение лекций и семинаров

**3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

Основная и дополнительная литература

**3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

**Методика проведения экзамена**

Экзамен проводится в устной форме. Билет состоит из двух вопросов. Время подготовки ответа на вопросы билета составляет 60 минут.

Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена категорически запрещено. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт и студент удаляется с экзамена. После ответа на вопросы билета преподаватель задает несколько дополнительных вопросов, на основании оценки ответов на которые итоговая оценка по предмету может быть повышена или понижена.

Критерии выставления оценок

Оценка «отлично» ставится за полностью раскрытый теоретический материал и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя. В болонской шкале оценка может быть скорректирована в ту или иную сторону с учетом малозначительных погрешностей изложения или, напротив, углубленного изложения материала.

Оценка «хорошо» ставится за изложенный теоретический материал билета (возможно с помощью наводящих подсказок преподавателя).

Оценка «удовлетворительно» ставится за знание основных вопросов по каждой теме.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

Соответствие оценки СПбГУ и оценки ECTS (Европейской системы переноса и накопления зачётных единиц):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Итоговый процент выполнения, % | Оценка СПбГУ при  проведении зачёта | Оценка ECTS | Оценка СПбГУ при  проведении экзамена |
| 90-100 | зачтено | A | отлично |
| 80-89 | зачтено | B | хорошо |
| 70-79 | зачтено | C | хорошо |
| 60-69 | зачтено | D | удовлетворительно |
| 50-59 | зачтено | E | удовлетворительно |
| менее 50 | не зачтено | F | неудовлетворительно |

**3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

Период обучения (модуль): **Семестр 6/8**

**Список вопросов к экзамену**:

1. Дерево.

2. Двудольный граф.

3. Эйлеров путь и цикл в графе.

4. Существование Гамильтонова пути и цикла: классические критерии Оре и Дирака.

5. Существование Гамильтонова пути и цикла: метод замыкания, теоремы Хватала.

6. Теоремы Хватала о гамильтоновых последовательностях.

7. Критерий существования гамильтонова цикла через связность.

8. Теорема Бонди о панциклическом графе.

9. Теорема Татта о существовании однородного графа степени k с обхватом g.

10. Максимальное паросочетание и дополняющие пути: теорема Бержа.

11. Теорема Холла.

12. Теорема Кёнига.

13. Независимые и доминирующие множества, паросочетания и покрытия в графе. Теорема Галлаи.

14. Паросочетания с предпочтениями. Теорема Гэйла-Шепли.

15. Теорема Татта о совершенном паросочетании.

16. Теорема Петерсена о совершенном паросочетании в однородном графе степени 3.

17. Теорема Плешника о совершенном паросочетании в однородном графе.

18. Теорема Петерсена о выделении 2-фактора в $2k$-регулярном графе.

19. Дефицит графа. Формула Бержа.

20. Фактор-критические графы. Теорема Галлаи.

21. Существование правильной раскраски в k цветов вершин k-редуцируемого графа.

22. Хроматический полином графа и его свойства.

23. Теорема Брукса: доказательство методом чередующихся цепей.

24. Теорема Брукса: доказательство с использованием связности.

25. k-критические графы. Свойства, теорема Дирака.

26. Гипотеза Хайоша, случай k=4.

27. Конструкция графа с произвольным хроматическим числом без треугольников.

28. Теорема Эрдеша.

29. Совершенные графы. Слабая гипотеза Бержа - теорема Ловаса.

30. Оптимальные раскраски ребер и их свойства. Реберное хроматическое число двудольного графа.

31. Теорема Визинга.

32. Теорема Гупты.

33. Точки сочленения и блоки в связном графе. Дерево блоков и точек сочленения.

34. Теоремы Гёринга, Менгера и Уитни.

35. Разделяющие множества в k-связном графе, части разбиения, фрагменты. Внутренность и граница части разбиения.

36. Зависимые и независимые k-разделяющие множества. Простейшие свойства. Разбиение графа парой зависимых k-разделяющих множеств.

37. Удаление вершины с сохранением k-связности.

38. Удаление ребер с сохранением k-связности. Теоремы Мадера.

39. Стягивание ребра в трёхсвязном графе без потери трёхвязности.

40. Планарные графы. Теорема Эйлера и ее следствия.

41. Теорема Куратовского.

42. Двойственный граф.

43. Триангуляция графа.

44. Тэйтовы раскраски, эквивалентность Тэйта.

45. Теорема Томассена о списочной 5-раскрашиваемости планарного графа.

46. Теорема Гринберга о гамильтоновом планарном графе. Контрпримеры к гипотезе Тэйта.

47. Компоненты сильной связности ориентированного графа, их свойства.

48. Минимальные сильно связные графы. Оценки на число стрелок.

49. Существование гамильтонова цикла в сильно связном турнирном графе.

50. Удаление вершин из сильно связного турнирного графа с сохранением сильной связности.

51. Теорема Редеи.

52. Циклы в сильно связных турнирных графах. Теоремы Муна.

53. Теорема Хватала-Ловаса о независимом множестве в ориентированном графе.

54. Теорема Галлаи-Мильграма и теорема Дилворса.

55. Теорема Роя-Галлаи о раскрасках и ориентациях.

56. Ядро орграфа. Критерий раскрашиваемости графа в терминах ядер ориентаций.

57. Теорема Гэльвина о списочных рёберных раскрасках двудольного графа.

58. Сети и потоки. Лемма о разрезе сети.

59. Теорема Форда-Фалкерсона.

60. Целочисленные сети. Целый максимальный поток в целочисленной сети.

61. Реберная теорема Менгера как следствие теоремы Форда-Фалкерсона.

62. Двумерные числа Рамсея: оценки сверху для случая двух и более цветов.

63. Оценка снизу на двумерные числа Рамсея.

64. Многомерные числа Рамсея: доказательство конечности.

65. Оценка количества рёбер в графе, удовлетворяющем наследственному свойству.

66. Графы без K\_n: теорема Турана, единственность экстремального графа.

67. Проективная плоскость над конечным полем и графы без циклов длины 4.

68. Количество остовных деревьев: теоремы Кэли.

69. Оценка количества листьев в остовном дереве связного графа с минимальной степенью вершины~3.

70. Максимальные наборы из $k$ непересекающихся по рёбрам лесов в графе $G$. Лемма о связанном множестве.

71. Теоремы Нэша-Уильямса.

72. Кратность корня 0 хроматического многочлена графа.

73. Кратность корня 1 хроматического многочлена графа.

74. Многочлен Татта. Корректность определения и связь с ранговым многочленом Уитни.

75. Значения полинома Татта: количество остовных лесов и остовных подграфов с минимальным количеством компонент связности, количество ациклических подграфов.

76. Универсальное свойство многочлена Татта. Связь с хроматическим многочленом.

Темы **докладов на семинаре**:

1. Применения теоремы Холла.

2. Паросочетания и дефицит графа.

3. Правильные раскраски графов с дополнительными условиями. Правильные раскраски гиперграфов.

4. Плоские графы и графы с ограничением на число пересечений.

5. Вычисление хроматических многочленов некоторых видов графов.

6. Применение многочлена Татта.

7. Остовные деревья.

8. Циклы в графах большой связности. Разделяющие множества в графах большой связности.

9. Циклическое пространсво графа и его применение.

10. Дискриминант графа.

11. Связь наибольшей длины цикла в графе с количеством ребер.

12. Барьеры.

13. Восстановление графа: вокруг гипотезы Улама.

14. Теорема Рамсея и ее применение.

15. Экстремальные задачи теории графов.

**3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

**3.2. Кадровое обеспечение**

**3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К чтению лекций должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента.

**3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

не требуется

**3.3. Материально-техническое обеспечение**

**3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Стандартно оборудованные лекционные аудитории, должны вмещать поток в соответствии со списком студентов

**3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

доска для письма мелом или фломастером

**3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

не требуется

**3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

не требуется

**3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Мел — не менее 1 куска на час лекционных занятий, фломастеры для доски, губка

**3.4. Информационное обеспечение**

**3.4.1 Список обязательной литературы**

1. О.Оре. «Теория графов». Москва, Мир, 1969.

2. К.Берж. «Теория графов и ее применение». Москва, изд.иностранной литературы, 1962.

3. Ф.Харари. « Теория графов» М, Наука, 1973**.**

**3.4.2 Список дополнительной литературы**

1. Д.В.Карпов. «Теория графов». http://logic.pdmi.ras.ru/~dvk/graphs\_dk.pdf

**3.4.3 Перечень иных информационных источников**

1. J.A.Bondy, U.S.R. Murty. «Graph Theory with applications.» North-Holland, New York, 1974.

2. R.Diestel. «Graph Theory». Springer-Verlag, 2005

**Раздел 4. Разработчики программы**

Карпов Дмитрий Валерьевич, доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник ПОМИ РАН, доцент СПбГУ